Università degli Studi Roma Tre
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Sintesi

Domini Almost Dedekind

Candidato
Annamaria Iezzi

Relatore
Prof.ssa Stefania Gabelli

Anno Accademico 2011-2012

Classificazione AMS: 13F05, 13F30.
Parole chiave: Domini almost Dedekind, Proprietà ($\sharp$), Fattorizzazione di ideali.

"An integral domain J (with unit) will be said to be almost Dedekind *if, given any maximal ideal P of J, J_P is a Dedekind domain."*

Questa è la definizione con cui Robert Gilmer, nel 1964, apriva l'articolo *"Integral Domains Which are Almost Dedekind"* [8], introducendo, così, nella letteratura matematica, una nuova classe di domini (anelli commutativi unitari integri) che si andasse a interporre, insiemisticamente parlando, tra le già esistenti e studiate classi dei domini di Dedekind e dei domini di Prüfer[1]:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{domini di} \\ \text{Dedekind} \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{c} \text{domini almost} \\ \text{Dedekind} \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{c} \text{domini di Prüfer} \\ \text{di dimensione uno} \end{array} \right\}.$$

Il nome "*almost Dedekind*" ("quasi Dedekind"), coniato da Gilmer per tali domini, voleva appunto sottolineare il fatto che essi risultavano "particolarmente vicini" ai domini di Dedekind.

La storia dei domini di Dedekind ebbe ufficialmente inizio negli anni '20 del 1900, quando furono introdotti da Emmy Noether (1882-1935), astraendo e generalizzando i risultati riguardanti le proprietà di fattorizzazione degli ideali negli anelli di interi algebrici, che Richard Dedekind (1831-1916) aveva ottenuto nel 1871. Dedekind aveva infatti mostrato che in un anello di interi algebrici ogni ideale proprio non nullo si fattorizza in modo unico nel prodotto di ideali primi. Nell'articolo del 1927 "*Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern*" [27], Noether mostrò, allora, in via più generale, che la proprietà di fattorizzazione unica in ideali primi per ogni ideale proprio non nullo caratterizza quei domini D che soddisfano i cosiddetti "*Assiomi di Noether*":

(1) ogni ideale di D è finitamente generato (ovvero D è noetheriano),

(2) ogni ideale primo non nullo di D è massimale (ovvero D ha dimensione uno),

[1] I domini di Prüfer furono introdotti da Heinz Prüfer (1896-1934) nel 1932, il quale, con l'articolo "*Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*" [29], aprì le porte allo studio di quei domini in cui ogni ideale finitamente generato fosse invertibile: tali domini, solo in un secondo momento, presero il nome, in suo onore, di *domini di Prüfer.*

(3) D è integralmente chiuso.

Noether denominò appunto un siffato dominio *dominio di Dedekind*.
Un dominio almost Dedekind condivide con un dominio di Dedekind le proprietà di essere integralmente chiuso e di dimensione uno, ma non, in generale, la proprietà di essere noetheriano. Un dominio almost Dedekind non Dedekind è, pertanto, un esempio di dominio localmente, ma non globalmente, noetheriano.
Pare che il primo esempio di dominio almost Dedekind non noetheriano fosse stato ottenuto da Nakano con una costruzione contenuta nel suo articolo "*Idealtheorie in einem speziellen unendlichen algebraischen Zahlkörper*" [25] del 1953. In tale articolo Nakano aveva focalizzato la sua attenzione sulle proprietà degli anelli di interi algebrici in estensioni algebriche di grado infinito dei numeri razionali, dimostrando, in particolare, che la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ nel campo ottenuto aggiungendo a $\mathbb{Q}$ le p-esime radici dell'unità, per ogni primo p, è un dominio almost Dedekind non noetheriano. Infatti, la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$, e più in generale di un dominio di Dedekind, in un'estensione algebrica infinita del suo campo dei quozienti, è in ogni caso un dominio di Prüfer di dimensione uno, ma non necessariamente un dominio di Dedekind; tuttavia si constatò che, sotto ulteriori ipotesi, si poteva sempre ottenere un dominio almost Dedekind. Gran parte dell'interesse maturato dai matematici nella teoria dei domini almost Dedekind, si concentrò allora nel cercare esempi di domini almost Dedekind non banali; le costruzioni interessarono, a parte la teoria degli anelli di interi algebrici, gli ambiti più vari dell'algebra: il gruppo di divisibilità di un dominio, i domini come intersezioni di valutazioni, l'anello di funzioni di Kronecker, gli anelli di semigruppo.
I domini almost Dedekind hanno avuto grande rilevanza soprattutto nella teoria dei polinomi a valori interi, originariamente introdotta, in due articoli separati del 1919, da Polya e Ostrowski. Dato un dominio D con campo dei quozienti K, l'anello di polinomi a valori interi $Int(D)$ è definito come l'insieme $\{f(X) \in K[X] | f(D) \subseteq D\}$. Con riferimento ai domini almost Dedekind, Chabert dimostrò in [6] che, se $Int(D)$ è un dominio di Prüfer, allora D è un dominio almost Dedekind con tutti i campi residui finiti.

Affinché $Int(D)$ sia un Prüfer, la condizione che D sia un dominio almost Dedekind con tutti i campi residui finiti è sufficiente se D noetheriano, ma non lo è nel caso non noetheriano (un controesempio fu fornito da Gilmer in [12]). Il problema venne poi completamente risolto da Loper, il quale, con l'articolo "*A classification of all D such that $Int(D)$ is a Prüfer domain*" [22] del 1998, giunse a una completa caratterizzazione di tutti i domini D tali che $Int(D)$ sia un dominio di Prüfer.

Prendendo spunto dall'articolo "*Almost Dedekind domains which are not Dedekind*" [23], nel quale Loper offre una panoramica della storia dei domini almost Dedekind e di come essi intervengono nei vari ambiti dell'algebra, questo lavoro si prefigge lo scopo di introdurre la classe dei domini almost Dedekind evidenziandone le analogie e le differenze da un lato con i domini di Prüfer, e dall'altro con quelli di Dedekind. Ciò porterà a caratterizzare i domini almost Dedekind all'interno della classe dei domini di Prüfer e i domini di Dedekind all'interno della classe dei domini almost Dedekind. Inoltre, sempre in tale ottica, si mostrerà come un dominio almost Dedekind, pur perdendo, in generale, la classica fattorizzazione degli ideali in ideali primi che caratterizza i domini di Dedekind, può presentare, sotto ulteriori ipotesi, differenti tipi di fattorizzazioni che sono generalizzazioni di questa. Si illustreranno, infine, alcune costruzioni di domini almost Dedekind, dando, tra l'altro, esempi concreti di domini almost Dedekind non noetheriani.

Il tema viene sviluppano in cinque capitoli.

Nel **Capitolo 0** vengono richiamati le definizioni e i principali risultati riguardanti la teoria dei domini di Prüfer, dei domini di Dedekind e dei domini di valutazione; ad essi sarà spesso fatto riferimento nel corso della tesi, come conseguenza degli stretti legami che gli almost Dedekind hanno con ognuno di tali domini.

Il **primo capitolo** si apre con la definizione di dominio almost Dedekind.

Definizione. Un dominio D è detto *almost Dedekind* se D_M è un dominio di valutazione noetheriano (DVR), per ogni ideale massimale M di D.

Un dominio almost Dedekind è integralmente chiuso e ha dimensione uno. I primi risultati che vengono proposti mirano a illustrare quelle proprietà che risultano essere anche caratterizzanti per un dominio almost Dedekind. Essi possono essere riuniti nel seguente teorema.

Teorema 1. *Sia D un dominio. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) D è almost Dedekind.

(ii) Ogni ideale di D con radicale un ideale primo è una potenza del suo radicale.

(iii) Se I, J, H sono ideali non nulli di D tali che $IH = JH$, allora $I = J$, ovvero D soddisfa la legge di cancellazione per ideali.

Il risultato successivo caratterizza i domini almost Dedekind all'interno della classe dei domini di Prüfer.

Teorema 2. *Sia D un dominio. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) D è un dominio almost Dedekind.

(ii) D è un dominio di Prüfer di dimensione uno che non contiene ideali massimali idempotenti.

(iii) D è un dominio di Prüfer tale che $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = (0)$ per ogni ideale proprio I di D.

Si vuole, infine, osservare come il "comportamento" di un dominio almost Dedekind, quando si passa alla chiusura integrale in un'estensione algebrica del suo campo dei quozienti, risulti essere più simile a quello di un Dedekind che a quello di un Prüfer.

Teorema 3. *Sia D un dominio integralmente chiuso con campo dei quozienti K; sia L un'estensione algebrica di K e sia D^* la chiusura integrale di D in L.*

(a) Se $[L : K] < \infty$ e se D è almost Dedekind, allora D^* è almost Dedekind.

(b) Se D^* è almost Dedekind allora D è almost Dedekind.

Tutto il **secondo capitolo**, basato sull'articolo di Gilmer "*Overrings of Prüfer domains*" [9], è rivolto allo studio della proprietà ($\sharp$).

Definizione. Siano D un dominio e Δ l'insieme degli ideali massimali di D. D gode della *proprietà* ($\sharp$), ovvero D è uno $\sharp$-*dominio*, se per Δ_1 e Δ_2, sottoinsiemi distinti di Δ, vale che

$$\bigcap_{M \in \Delta_1} D_M \neq \bigcap_{M \in \Delta_2} D_M.$$

Dopo aver dato, nella prima sezione, alcuni risultati preliminari sulla proprietà ($\sharp$), si passa a considerare, nella seconda sezione, le conseguenze che la proprietà ($\sharp$) ha su un dominio di Prüfer. Attraverso alcuni lemmi intermedi si giunge a dimostrare il seguente teorema.

Teorema 4. *Se D ha dimensione uno e se $\{M_\beta\}$ è l'insieme degli ideali massimali di D, allora, dato $M_\alpha \in \Delta$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $D_{M_\alpha} \not\supseteq \bigcap_{\beta \neq \alpha} D_{M_\beta}$.

(ii) M_α è il radicale di un ideale con due generatori.

(iii) M_α è il radicale di un ideale finitamente generato.

Tale teorema mostra che se D è un dominio di Prüfer uno-dimensionale, allora D è uno $\sharp$-dominio se e solo se ogni ideale massimale contiene un ideale finitamente generato che non sia contenuto in altri ideali massimali. In particolare, ogni dominio di Dedekind, essendo noetheriano, è uno $\sharp$-dominio. Il seguente corollario evidenzia che in un dominio di Prüfer di dimensione uno la proprietà ($\sharp$) è equivalente al carattere di finitezza.

Corollario 5. *Sia D un dominio di Prüfer di dimensione uno. D è uno $\sharp$-dominio se e solo se ogni elemento non nullo e non invertibile di D appartiene a un numero finito di ideali massimali.*

Il capitolo si conclude con una caratterizzazione abbastanza completa dei domini di Dedekind all'interno della classe dei domini almost Dedekind.

Teorema 6. *Sia D un dominio almost Dedekind. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *D è un dominio di Dedekind.*

(ii) *D è uno $\sharp$-dominio.*

(iii) *Ogni elemento non nullo e non invertibile di D è contenuto in un numero finito di ideali massimali, ovvero D ha il carattere di finitezza.*

(iv) *D è noetheriano.*

(v) *Ogni ideale massimale di D è invertibile.*

Il **terzo capitolo** offre una panoramica della fattorizzazione degli ideali nei domini almost Dedekind. Costretti a rinunciare, in generale, alla fattorizzazione di ideali in ideali primi tipica dei domini di Dedekind, vengono proposti tipi di fattorizzazioni di ideali che risultano essere una variazione e una generalizzazione di questa: le modiche riguarderanno da una parte gli ideali che appaiono nella fattorizzazione e dall'altra la classe di ideali da fattorizzare.
La prima variazione che viene fatta, nella prima sezione del capitolo, è quella di rimpiazzare i fattori primi con ideali radicali. Viene, pertanto, introdotta la nozione di SP-dominio.

Definizione. Un dominio D ha la *proprietà* SP o, equivalentemente, è un SP-*dominio* se ogni ideale è prodotto di ideali radicali.

Un dominio di Dedekind è un SP-dominio, come conseguenza diretta del fatto che in un dominio di Dedekind ogni ideale proprio si fattorizza in ideali primi.
Ciò non è vero per un dominio almost Dedekind. Vale invece che:

Teorema 7. *Un SP-dominio è un dominio almost Dedekind.*

La dimostrazione di questo teorema viene fornita dopo una serie di risultati intermedi sulla proprietà SP, il più significativo dei quali è contenuto nella seguente proposizione.

Proposizione 8. *Se un dominio D gode della proprietà SP, allora ogni ideale primario di D è potenza del suo radicale.*

Appurato che ogni SP-dominio è un dominio almost Dedekind, si passa, dunque, al problema della caratterizzazione di un SP-dominio all'interno della classe dei domini almost Dedekind. A tale scopo è necessario introdurre la nozione di ideale massimale critico.

Definizione. Un ideale massimale M di un dominio D si dice *critico* se ogni sottoinsieme finito di M è contenuto nel quadrato di un ideale massimale di D. Equivalentemente, M è critico se e solo se ogni sottoideale finitamente generato di M è contenuto nel quadrato di un ideale massimale di D.

Si ottiene quindi il seguente teorema.

Teorema 9. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti per un dominio almost Dedekind D:*

(i) *D è un SP-dominio.*

(ii) *D è privo di ideali massimali critici.*

(iii) *Se A è un ideale proprio finitamente generato di D, allora $\mathrm{rad}(A)$ è un ideale finitamente generato di D.*

(iv) *Ogni ideale principale proprio di D è prodotto di ideali radicali.*

(v) *Per ogni ideale proprio A di D esistono ideali radicali $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq J_n$ tali che $A = J_1 J_2 \cdots J_n$.*

(vi) *Ogni ideale proprio A di D può essere fattorizzato in modo unico come prodotto $A = J_1 J_2 \cdots J_n$ di ideale radicali J_i tali che $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq J_n$.*

Nella seconda sezione del capitolo, l'approccio è quello di porre delle restrizioni sul tipo di ideali da fattorizzare. In tutta la sezione D è supposto essere un dominio di Prüfer di dimensione uno. I risultati che vengono proposti devono essere preceduti da ulteriori definizioni, a partire da quella di primo sharp.

Definizione. Un ideale massimale M di D è un *primo sharp* se contiene un ideale finitamente generato che non sia contenuto in nessun altro ideale massimale di D. Un ideale massimale che non è primo sharp è detto *primo dull.*

Viene, dunque, partizionato l'insieme degli ideali massimali di D in due insiemi: $\mathrm{Max}(D) = \mathcal{M}_\sharp(D) \sqcup \mathcal{M}_\dagger(D)$, dove $\mathcal{M}_\sharp(D)$ indica l'insieme dei primi sharp e $\mathcal{M}_\dagger(D)$ l'insieme dei primi dull di D.
Introdotta tale nomenclatura, dato un dominio di Prüfer D uno-dimensionale, viene definito ricorsivamente:

1) $D_1 = D$;

2) $D_2 = \displaystyle\bigcap_{M \in \mathcal{M}_\dagger(D_1)} (D_1)_M$;

$\vdots$

i) $D_i = \displaystyle\bigcap_{M \in \mathcal{M}_\dagger(D_{i-1})} (D_{i-1})_M$;

$\vdots$

arrestandosi a D_n se $\mathcal{M}_\dagger(D_n)$ è vuoto, nel qual caso si pone $D_{n+1} = K$, oppure se $\mathcal{M}_\dagger(D_n) = \mathrm{Max}(D_n)$, nel qual caso vale $D_n = D_{n+1}\,(\neq K)$.
Nel caso in cui $D_n \neq K$ e $D_{n+1} = K$ si dice che D ha *grado sharp* n. D'altra parte, se $D = D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \cdots \subsetneq D_n = D_{n+1} \neq K$, si dice che D ha *grado dull* n. Inoltre, per un ideale frazionario I di D, si dice che I ha *grado sharp* n se $ID_n \neq D_n$ e $ID_{n+1} = D_{n+1}$.
Vengono quindi fatte alcune osservazioni e vengono illustrate alcune proprietà riguardanti gli ideali massimali di un generico D_i, soprattutto in relazione alle loro contrazioni in D_{i-1} ed estensioni in D_{i+1}.

Il seguente lemma è fondamentale per lo studio della fattorizzazione degli ideali frazionari finitamente generati in un dominio almost Dedekind. Esso mostra, infatti, che in un dominio almost Dedekind gli ideali frazionari finitamente generati di grado sharp uno sono esattamente quelli che possono essere fattorizzati in un prodotto finito di potenze (eventualmente negative) di ideali massimali.

Lemma 10. *Sia D un dominio almost Dedekind e sia I un ideale frazionario finitamente generato non nullo di D, $I \neq D$. Allora I è prodotto finito di potenze non nulle di ideali massimali (univocamente determinati) se e solo se I ha grado sharp uno. Inoltre tali ideali massimali sono primi sharp.*

Il risultato precedente risulta essere l'elemento chiave per la dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 11. *Sia D un dominio almost Dedekind. Per ogni intero positivo k e ogni primo P_α di grado sharp k, sia J_α un ideale finitamente generato di D tale che $J_\alpha D_{P_\alpha} = P_\alpha D_{P_\alpha}$ e che P_α sia l'unico ideale massimale di D che, contemporaneamente, contenga J_α e sopravviva in D_k. Se I è un ideale frazionario finitamente generato di grado sharp finito, $I \neq D$, allora I si fattorizza in modo unico in un prodotto finito di potenze non nulle di ideali della famiglia $\{J_\alpha\}$. In particolare, gli elementi della famiglia $\{J_\alpha\}$ sono distinti.*

Per un dominio almost Dedekind D con $\mathrm{Max}(D) = \{P_\alpha | \alpha \in A\}$, un insieme di ideali finitamente generati $\mathcal{J} := \{J_\alpha | \alpha \in A\}$ tali che $J_\alpha D_{P_\alpha} = P_\alpha D_{P_\alpha}$, per ogni α, e inoltre tali che ogni ideale frazionario non nullo finitamente generato di D può essere fattorizzato come prodotto finito di potenze di ideali della famiglia $\mathcal{J}$, viene detto una *famiglia fattorizzante* per D. Introdotta tale nozione il precedente teorema permette di determinare in quali casi un dominio almost Dedekind possiede una famiglia fattorizzante.

Corollario 12. *Sia D un dominio almost Dedekind tale che ogni ideale primo abbia grado sharp finito. Allora esiste un insieme fattorizzante $\mathcal{J}$ tale che ogni ideale frazionario finitamente generato di D si fattorizzi in modo unico su $\mathcal{J}$. In particolare, ogni dominio almost Dedekind di grado sharp finito possiede un insieme fattorizzante.*

Il **quarto capitolo**, infine, è completamente dedicato alle costruzioni di domini almost Dedekind che troviamo nella letteratura matematica, con particolare riferimento al caso non noetheriano, a partire dalla prima costruzione

di Nakano nel 1953. Nakano aveva infatti focalizzato la sua attenzione sulle proprietà degli anelli di interi algebrici in estensioni algebriche di grado infinito dei numeri razionali, dimostrando, in particolare, che la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ nel campo ottenuto aggiungendo a $\mathbb{Q}$ le p-esime radici dell'unità, per ogni primo p, è un dominio almost Dedekind non noetheriano.
In tale capitolo la nostra attenzione si rivolge soprattutto a quelle costruzioni che riguardano le estensioni infinite e gli anelli di semigruppo (che occupano rispettivamente la prima e la seconda sezione), mentre delle altre si daranno solo brevi cenni e i riferimenti bibliografici.
All'interno della sezione sulle estensioni infinite, viene dapprima analizzata una costruzione che studia l'unione di una catena di domini di Dedekind, sotto particolari ipotesi. Il risultato principale è racchiuso nel seguente teorema.

Teorema 13. *Sia $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \cdots$ una catena di domini di Dedekind che soddisfi ciascuna delle seguenti proprietà:*

1. *Per $i < j$, ogni ideale massimale di D_i sopravvive in D_j.*
2. *Ogni ideale massimale di D_j si contrae su un ideale massimale di D_1.*
3. *Se M' è un ideale massimale di D_j e $M = M' \cap D_1$ allora $M(D_j)_{M'} = M'(D_j)_{M'}$.*

Allora il dominio $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_n$ è un dominio almost Dedekind.

La maggior parte delle prime costruzioni di domini almost Dedekind non noetheriani furono ottenute utilizzando il metodo illustrato nel teorema precedente, nel caso in cui D_i fosse intero su D_{i-1}, per ogni $i \geq 2$.

La costruzione successiva considera una rete di domini almost Dedekind. Viene quindi introdotta la seguente notazione.
Sia D_0 un dominio almost Dedekind con campo dei quozienti K_0 e sia K un'estensione algebrica di campo di K_0 che sia espressa come unione di una rete $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di campi intermedi, ognuno dei quali sia finito su K_0 (con il termine *rete* si intende che per ogni $\alpha, \beta \in A$ esiste un elemento γ di A tale

che K_α e K_β sono sottocampi di K_γ):

$$K = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha.$$

Si assuma che $K_0 \in \{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Per ogni $\alpha \in A$, viene denotato con D_α la chiusura integrale di D_0 in K_α. Si osservi che ogni D_α è un dominio almost Dedekind. Si ponga

$$D = \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha.$$

Allora D è la chiusura integrale di D_0 in K e $D \cap K_\alpha = D_\alpha$ per ogni $\alpha \in A$. Si osservi inoltre che D è un dominio di Prüfer di dimensione uno. Allora D sarà un dominio almost Dedekind se e solo se D non contiene ideali massimali idempotenti.
Sia ora P un ideale primo di D; si definisca, per ogni $\alpha \in A$, $P_\alpha = P \cap D_\alpha$. Chiaramente P_α si contrae su P_0. Per ogni $\alpha \in A$, viene associato a P_α un intero positivo e_α definito come segue. Se $V_\alpha := (D_\alpha)_{P_\alpha}$, allora, essendo V_α un DVR, l'ideale P_0V_α è una potenza di $P_\alpha V_\alpha$: $P_0V_\alpha = (P_\alpha V_\alpha)^{e_\alpha}$.

Il risultato principale mostra sotto quali ipotesi il dominio D, così costruito, risulta essere un dominio almost Dedekind.

Teorema 14. *D è un dominio almost Dedekind se e solo se per ogni ideale massimale P di D, l'insieme $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è limitato.*

Ricorrendo, in particolare, a questo risultato, vengono quindi dati esempi di domini almost Dedekind non noetheriani tratti da [10, §42] e da [25, §1], con i quali si conclude la sezione riguardante le estensioni infinite: a partire da un dominio di Dedekind, quale $\mathbb{Z}$, si costruisce, infatti, un'estensione algebrica infinita F di $\mathbb{Q}$ tale che la chiusura integrale $\mathbb{Z}^*$ di $\mathbb{Z}$ in F sia un dominio almost Dedekind non Dedekind.

La seconda sezione del quarto capitolo si occupa della costruzione di anelli di semigruppo almost Dedekind. Dopo aver richiamato le nozioni base riguardanti la teoria dei semigruppi, viene definito un sempigruppo di Prüfer (notazione: $\mathbb{Q}_0$ denota il semigruppo additivo dei razionali non negativi e $\mathbb{Z}_0$ il semigruppo additivo degli interi non negativi):

Definizione. Un semigruppo S_0 è detto *sottosemigruppo di Prufër* di $\mathbb{Q}_0$ se è della forma $S_0 = G \cap \mathbb{Q}_0$, dove G è un sottogruppo di $\mathbb{Q}$ che contiene $\mathbb{Z}$.

Un semigruppo di Prüfer presenta la seguente caratterizzazione:

Proposizione 15. *S_0 è un sottosemigruppo di Prüfer di $\mathbb{Q}_0$ se e solo se S_0 è generato da 0 e da una famiglia (eventualmente finita) $\{1/m_i\}$ di numeri razionali, dove $\{m_i\}$ è una famiglia di interi positivi con la proprietà che m_i divide m_{i+1} per ogni i.*

A partire dal concetto di semigruppo viene poi data la definizione di un anello di semigruppo.

Definizione. Sia R un anello e S un semigruppo additivo, commutativo e con zero. Allora l'*anello di semigruppo generato da S*, che denoteremo con $R[S]$, è definito come l'algebra simbolica

$$R[S] := R[X^s;\, s \in S] = \left\{ \sum_{s \in S} a_s X^s | a_s = 0 \text{ per quasi tutti gli indici } s \in S \right\}$$

con la somma e la moltiplicazione definite formalmente dalle relazioni

$$X^0 := 1, \qquad X^s \cdot X^t := X^{s+t}.$$

La nostra attenzione si limita al caso in cui R è un dominio e S un semigruppo additivo, abeliano, cancellativo, senza torsione e con zero. Il motivo di tali assunzioni è che $R[S]$ è un dominio se e solo se R è un dominio e S un semigruppo cancellativo e privo di torsione.
Tramite una serie di risultati intermedi sugli anelli di semigruppo, si giunge, così, al risultato centrale in cui vengono riportate le condizioni affinché un anello di semigruppo sia un dominio almost Dedekind.

Teorema 16. *Sia F un campo di caratteristica q e S un sottosemigruppo di Prüfer di $\mathbb{Q}_0$ con gruppo quoziente G.*

(a) L'anello di semigruppo $F[S]$ è un dominio almost Dedekind se e solo se S è isomorfo a $\mathbb{Z}_0$. In particolare $F[S]$ è un dominio almost Dedekind se e solo se è un PID.

(b) $F[G]$ *è un dominio almost Dedekind se e solo se* $q = 0$ *o* $q > 0$ *e la* q*-componente della caratteristica di* S *è finita.*

Alla luce del teorema precedente il seguente corollario risulta immediato.

Corollario 17. *Sia* F *un campo di caratteristica* q *e* G *un sottogruppo di* $\mathbb{Q}$ *contenente* $\mathbb{Z}$*. L'anello di gruppo* $F[G]$ *è un dominio almost Dedekind se e solo se* $q = 0$ *o* $q > 0$ *ed esiste un intero positivo* k *tale che* $1/q^k \notin G$*.*

Richiamando che, per un dominio D e un gruppo abeliano G, l'anello di gruppo $D[G]$ è noetheriano se e solo se D è noetheriano e G è finitamente generato, è interessante notare che il corollario precedente permette di costruire una classe di esempi di domini almost Dedekind non noetheriani.

Bibliografia

[1] J. T. Arnold e R. Gilmer, *Idempotent ideals and unions of nets of Prüfer domains*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math. **31** (1967), 131–145.

[2] M. F. Atiyah e I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[3] H. S. Butts e R. Gilmer, *Primary ideals and prime power ideals*, Canad. J. Math. **18** (1966), 1183–1195.

[4] H. S. Butts e R. C. Phillips, *Almost multiplication rings*, Canad. J. Math. **17** (1965), 267–277.

[5] H. S. Butts e R. W. Yeagy, *Finite bases for integral closures*, J. Reine Angew. Math. **282** (1976), 114–125.

[6] J. L. Chabert, *Un anneau de Prüfer*, J. Algebra **107** (1987), no. 1, 1–16.

[7] M. Fontana, E. Houston, e T. G. Lucas, *Factoring ideals in integral domains*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 14, to appear.

[8] R. Gilmer, *Integral domains which are almost Dedekind*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 813–818.

[9] ———, *Overrings of Prüfer domains*, J. Algebra **4** (1966), 331–340.

[10] ———, *Multiplicative ideal theory*, Marcel Dekker Inc., New York, 1972, Pure and Applied Mathematics, No. 12.

[11] ———, *Commutative semigroup rings*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1984.

[12] ———, *Prüfer domains and rings of integer-valued polynomials*, J. Algebra **129** (1990), no. 2, 502–517.

[13] R. Gilmer e J. Ohm, *Integral domains with quotient overrings*, Math. Ann. **153** (1964), 97–103.

[14] R. Gilmer e T. Parker, *Divisibility properties in semigroup rings*, Michigan Math. J. **21** (1974), 65–86.

[15] ———, *Semigroup rings as Prüfer rings*, Duke Math. J. **41** (1974), 219–230.

[16] W. J. Heinzer, *Some properties of integral closure*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 749–753.

[17] W. J. Heinzer e J. Ohm, *Locally noetherian commutative rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **158** (1971), 273–284.

[18] W. Krull, *Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche*, Math. Z. **41** (1936), no. 1, 545–577.

[19] K. A. Loper, *More almost Dedekind domains and Prüfer domains of polynomials*, Zero-dimensional commutative rings (Knoxville, TN, 1994), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 171, Dekker, New York, 1995, pp. 287–298.

[20] ———, *Another Prüfer ring of integer-valued polynomials*, J. Algebra **187** (1997), no. 1, 1–6.

[21] ———, *Sequence domains and integer-valued polynomials*, J. Pure Appl. Algebra **119** (1997), no. 2, 185–210.

[22] ———, *A classification of all D such that* $\mathrm{Int}(D)$ *is a Prüfer domain*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 3, 657–660.

[23] ———, *Almost Dedekind domains which are not Dedekind*, Multiplicative ideal theory in commutative algebra, Springer, New York, 2006, pp. 279–292.

[24] K. A. Loper e T. G. Lucas, *Factoring ideals in almost Dedekind domains*, J. Reine Angew. Math. **565** (2003), 61–78.

[25] N. Nakano, *Idealtheorie in einem speziellen unendlichen algebraischen Zahlkörper*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A. **16** (1953), 425–439.

[26] ———, *Über idempotente Ideale in unendlichen algebraischen Zahlkörpern*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A. **17** (1953), 11–20.

[27] E. Noether, *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern*, Math. Ann. **96** (1927), no. 1, 26–61.

[28] B. Olberding, *Factorization into radical ideals*, Arithmetical properties of commutative rings and monoids, Lect. Notes Pure Appl. Math., vol. 241, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005, pp. 363–377.

[29] H. Prüfer, *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Z. **17** (1923), no. 1, 35–61.

[30] N. H. Vaughan e R. W. Yeagy, *Factoring ideals into semiprime ideals*, Canad. J. Math. **30** (1978), no. 6, 1313–1318.

[31] O. Zariski e P. Samuel, *Commutative algebra, Volume I*, The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1958, With the cooperation of I. S. Cohen.

[32] ———, *Commutative algebra. Volume II*, The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey-Toronto-London-New York, 1960.